# 18

# El modelo cuadrático en el aula[1]

Silvia Viviana Altman
Claudia Rita Comparatore
Liliana Edith Kurzrok

**Resumen**

Coincidimos con la postura que señala que, para el aprendizaje en Matemática, es indispensable que los alumnos construyan el sentido de los conceptos que trabajan en el aula.

La modelización encaminada a resolver problemas propios de la Matemática o ajenos a la misma, contribuye a este fin. Para ello, les presentamos a los alumnos diferentes problemas en los cuales pueden avanzar con los conocimientos que poseen pero, en algún momento éstos se vuelven insuficientes o poco económicos para completar la resolución. Surge así la necesidad del nuevo concepto como herramienta que permitirá avanzar en forma más eficaz. En este trabajo presentamos una secuencia que apunta a ese fin y que ponemos en práctica desde hace varios años con alumnos de tercer y cuarto año.

## Introducción

Es fundamental, para el aprendizaje de la Matemática, que los alumnos construyan el sentido de los conceptos que trabajan en el aula. Entendemos por sentido de un concepto el conjunto de problemas, propiedades, procedimientos y formas de representación asociados al mismo. Brousseau (1983) incluye también en el sentido *"el conjunto de*

---

[1] Trabajo presentado en las Segundas Jornadas Nacionales en Didácticas Específicas, San Martín (Buenos Aires), Argentina, en Septiembre de 2006.

*concepciones que el concepto rechaza, de errores que evita, de economías que procura, de formulaciones que retoma, etc.”*.

Por este motivo coincidimos con la postura según la cual la modelización encaminada a resolver problemas propios de la Matemática o ajenos a la misma, contribuye a este fin. Para ello les presentamos a los alumnos diferentes problemas en los cuales pueden avanzar con los conocimientos que poseen pero, en algún momento éstos se vuelven insuficientes o poco económicos para completar la resolución. Surge así la necesidad del nuevo concepto como herramienta que permitirá avanzar en forma más eficaz.

La gestión de la clase es fundamental para conseguir este propósito. Para esto nos basamos en la propuesta sintetizada por Ministerio de Educación en el cuadernillo “Propuestas para el aula” (Polimodal - Matemática) en cuanto a cómo trabajar en la clase. Transcribimos los momentos de la clase que se plantean:

> Para que las situaciones de enseñanza planteadas favorezcan un aprendizaje significativo para los alumnos, la gestión de la clase puede organizarse considerando cuatro momentos diferenciados. Un **primer momento** de presentación de las situaciones para su resolución en pequeños grupos.
>
> Un **segundo momento** de resolución efectiva por parte de los alumnos en el que la intervención del docente está pensada como facilitadora de la acción para aclarar consignas y alentar la resolución sin intervenir de modo directo sugiriendo “lo que se debe hacer”.
>
> Un **tercer momento** de confrontación tanto de los resultados como de los procedimientos - argumentos empleados en el que el docente organiza la reflexión sobre lo realizado y un **cuarto momento** de síntesis del docente de los conocimientos a los que llegó el grupo en el cual se establecen las relaciones entre ese conocimiento que ha circulado en la clase y aquel que se pretendía enseñar. En esta etapa el docente propone los nombres de las propiedades utilizadas, reconoce ciertos conocimientos producidos por los alumnos y los vincula con conocimientos ya estudiados o con nuevos a trabajar, etc.

Nos proponemos presentar una secuencia que trabajamos desde hace varios años en polimodal, coordinadas por la Doctora Patricia Sadovsky, para introducir el modelo cuadrático.

Los conocimientos previos necesarios para trabajar esta secuencia son:

- Función lineal
- Lectura y construcción de gráficos cartesianos
- Manejo de propiedades algebraicas, con el objeto de transformar expresiones algebraicas.: distributiva, asociativa, etc.
- Teorema de Pitágoras.
- Definiciones de cuadriláteros.
- Nociones sobre la necesidad de demostración de las conjeturas planteadas.

La secuencia, que se basa en un problema de Emma Castelnuovo, permite mostrar, a través de la modelización de la situación y el análisis de las propiedades que se ponen en juego, las características de las funciones cuadráticas y sus utilidades. Además, moviliza las argumentaciones y demostraciones de las diferentes conjeturas que explicitan los alumnos, la interpretación de las distintas representaciones: gráficas y algebraicas, el análisis de la validez de las respuestas obtenidas, de ventajas del modelo sobre la experimentación y la puesta en funcionamiento la notación algebraica para representar modelos.

**Análisis previos**

El marco didáctico principal en el que nos ubicamos es La Teoría de Situaciones Didácticas, de Guy Brousseau, y su propósito es el de modelizar la enseñanza.

En los últimos años se ha realizado un trabajo teórico importante para extender sus conceptos de manera de poder adaptarlos al estudio de las clases. Sin embargo, el trabajo que aquí presentamos no es una investigación en la que tomamos el rol de observadores, sino que las utilizamos y modificamos en función de las aulas en las que lo fuimos trabajando.

El objetivo de la misma es poner en juego los conocimientos sabidos por los alumnos y que se promuevan nuevos, para eso recurrimos a la ingeniería didáctica. También utilizamos el concepto de trasposición didáctica (Chevallard, 1997) de los conceptos que queremos que se pongan en juego teniendo en cuenta el entorno en el que esos conocimientos van establecerse. Este punto es fundamental en el análisis de la situación que se plantea, pues para que esta pueda dar los frutos deseados es indispensable tener en cuenta la población y la institución en donde se trabajará.

Procuramos que los conceptos que nos proponemos sean aprendidos aparezcan en un contexto, no necesariamente cotidiano, sino como necesario para avanzar en el problema planteado.

Podemos anticipar que la secuencia genera la inquietud necesaria en la clase para la participación de todos los alumnos, sobre todo por el carácter conjetural que permite la participación y opinión de la mayoría. Pueden presentarse alumnos apáticos a los cuales se intenta incluir en la actividad, especialmente en las puestas en común.

Uno de los obstáculos que anticipamos es que, el hecho de venir trabajando fuertemente el modelo lineal, motivará a intentar seguir usándolo, lo que llevará a resultados erróneos pero que podrán validarse a partir del material presentado.

Incluimos, además, la necesidad de demostrar las conjeturas que plantean respecto a figuras que se forman y suponemos que los alumnos no considerarán que esto sea necesario debido a que un buen dibujo permite "ver" lo conjeturado. Previsto esto, nos ocupamos de mostrar la necesidad de la demostración más allá de lo que parece.

También pretendemos que puedan anticipar el gráfico que acompañaría a la situación propuesta y nuevamente necesitarán demostrar las propuestas realizadas. En este caso, no es necesario mostrar que deben justificar, pues queda incluido dentro de lo que proponen.

A partir de la secuencia original, lograremos poner en juego las propiedades de la función cuadrática y su gráfico, y de allí precisar el estudio de funciones cuadráticas en general.

**Materiales:**

Cuadrado realizado con un mecano o con un marco de madera en el cual se colocan sobre los lados clavitos o tornillitos a distancias iguales. Además se necesita una banda elástica grande o cuatro chicas.

Las bandas elásticas se utilizan para conectar los tornillos que se eligen en los lados del marco.

**Objetivos:**

- Poner en funcionamiento herramientas para la modelización: selección de variables y análisis de condiciones.
- Interpretar las distintas representaciones: gráficas y algebraicas.
- Analizar la validez de las respuestas obtenidas.
- Discutir ventajas del modelo sobre la experimentación.
- Poner en funcionamiento la notación algebraica para representar modelos.

**La secuencia:**

Les mostramos a los alumnos el marco construido y les explicamos que se trata de un cuadrado de 25 cm de lado. Sobre uno de los lados, consideramos un clavo o tornillo (punto) a una cierta distancia, hacia la derecha, del vértice izquierdo del marco. De manera análoga consideramos puntos sobre los otros lados con lo cual se determina los vértices de un cuadrilátero que queda formado cuando unimos esos puntos con las bandas elásticas.

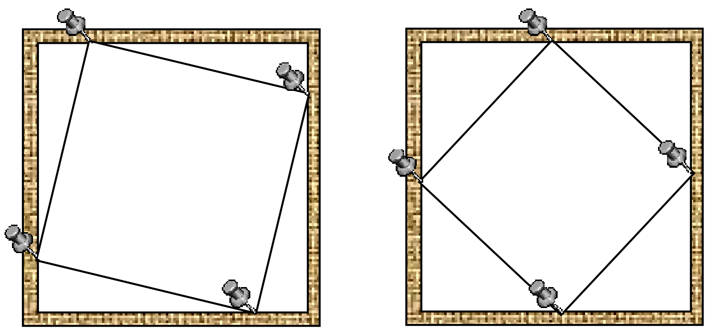


Figura Nº 01

Si movemos uno de los vértices de este cuadrilátero, los otros se mueven de la misma manera, tal como se muestra en la Figura Nº 01

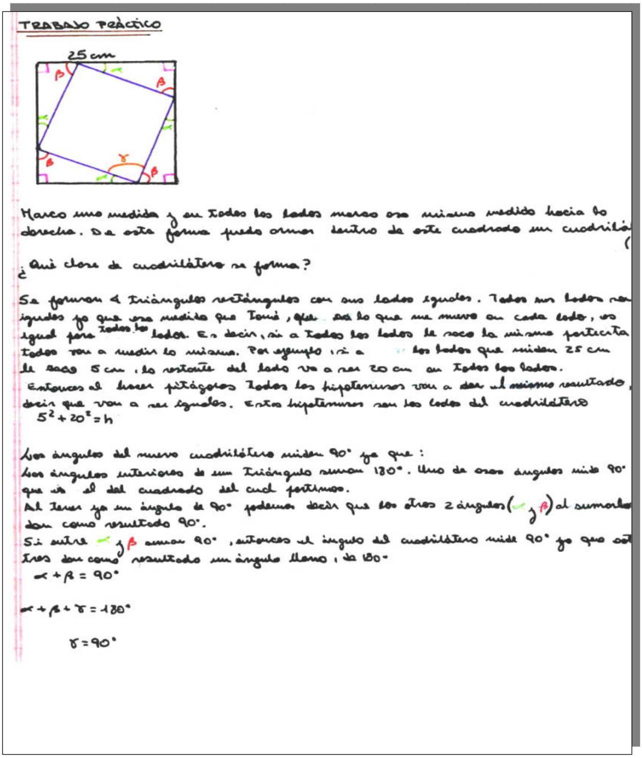
La primera pregunta que les formulamos a los alumnos es:

*¿Qué clase de cuadrilátero queda formado?*

En un primer momento los alumnos contestan sin justificar que se trata de un cuadrado, un rombo, un rectángulo, etc. Es interesante que discutan en pequeños grupos y que busquen una manera de probar su afirmación.

A continuación gestionamos una puesta en común en la cual los alumnos exponen la demostración de las condiciones que se cumplen, teniendo presente la definición de los distintos cuadriláteros.

Entre todos llegan a la conclusión de que se trata de un cuadrado y se los motiva a probar su cojetura. En verdad, muchos intentan decir que alcanza con "ver lo que está dibujado, y otros comienzan a ensayar propuestas de demostración (Figuras Nº 2 y 3).



TRABAJO PRÁCTICO

25 cm

Marco una medida y en todos los lados marco esa misma medida hacia la derecha. De esta forma puedo armar dentro de este cuadrado un cuadrilá(tero)

¿Qué clase de cuadrilátero se forma?

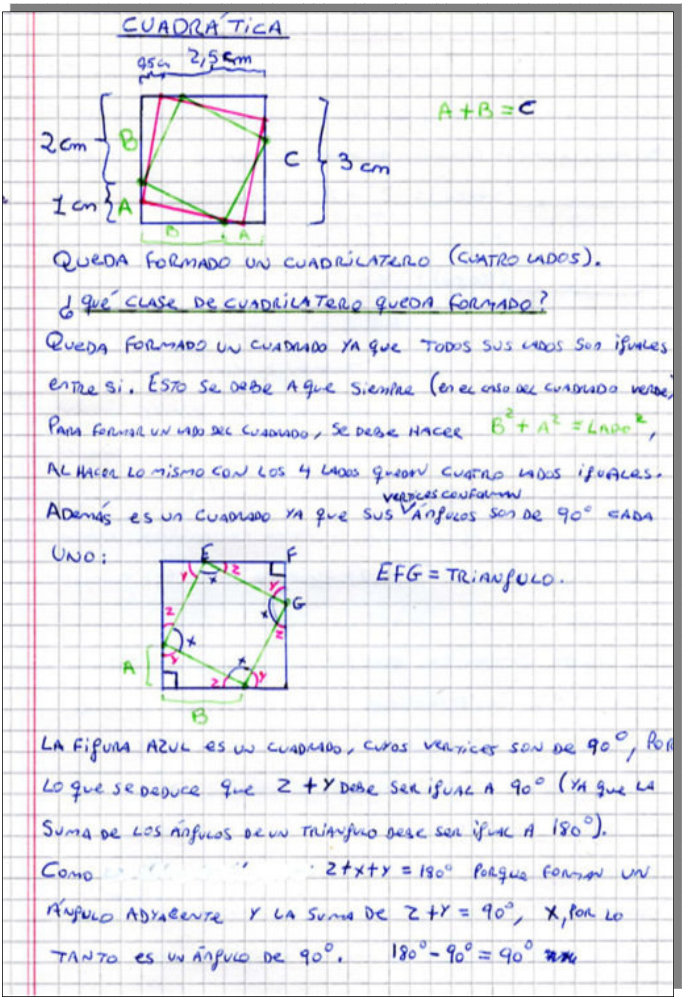
Se forman 4 triángulos rectángulos con sus lados iguales. Todos sus lados son iguales ya que esa medida que tomé, que es lo que me muevo en cada lado, es igual para todos los lados. Es decir, si a todos los lados le saco la misma partecita todos van a medir lo mismo. Por ejemplo, si a los lados que miden 25 cm le saco 5 cm, lo restante del lado va a ser 20 cm en todos los lados.
Entonces al hacer pitágoras todas las hipotenusas van a dar el mismo resultado, decir que van a ser iguales. Estas hipotenusas son los lados del cuadrilátero
$5^2 + 20^2 = h$

Los ángulos del nuevo cuadrilátero miden 90° ya que:
Los ángulos interiores de un triángulo suman 180°. Uno de esos ángulos mide 90° que es el del cuadrado del cual partimos.
Al tener ya un ángulo de 90° podemos decir que los otros 2 ángulos ($\alpha$ y $\beta$) al sumarlos dan como resultado 90°.
Si entre $\alpha$ y $\beta$ suman 90°, entonces el ángulo del cuadrilátero mide 90° ya que estos tres dan como resultado un ángulo llano, de 180°.
$\alpha + \beta = 90°$

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

$\gamma = 90°$

Figura Nº 02


CUADRÁTICA

0,5 cm 2,5 cm

2 cm B

1 cm A

C 3 cm

B A

A + B = C

QUEDA FORMADO UN CUADRILÁTERO (CUATRO LADOS).

¿QUÉ CLASE DE CUADRILÁTERO QUEDA FORMADO?

QUEDA FORMADO UN CUADRADO YA QUE TODOS SUS LADOS SON IGUALES ENTRE SI. ESTO SE DEBE A QUE SIEMPRE (EN EL CASO DEL CUADRADO VERDE) PARA FORMAR UN LADO DEL CUADRADO, SE DEBE HACER $B^2 + A^2 = LADO^2$, AL HACER LO MISMO CON LOS 4 LADOS QUEDAN CUATRO LADOS IGUALES. ADEMÁS ES UN CUADRADO YA QUE SUS VÉRTICES CONFORMAN ÁNGULOS SON DE 90° CADA UNO:

E F G

y z x z x y A B

EFG = TRIANGULO.

LA FIGURA AZUL ES UN CUADRADO, CUYOS VÉRTICES SON DE 90°, POR LO QUE SE DEDUCE QUE Z + Y DEBE SER IGUAL A 90° (YA QUE LA SUMA DE LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO DEBE SER IGUAL A 180°).

COMO Z + X + Y = 180° PORQUE FORMAN UN ÁNGULO ADYACENTE Y LA SUMA DE Z + Y = 90°, X, POR LO TANTO ES UN ÁNGULO DE 90°. 180° − 90° = 90°

Figura Nº 03

Es usual que algunos alumnos consideren que alcanza con demostrar que todos los lados son congruentes para afirmar que es un cuadrado. Debemos recordar aquí las definiciones de los distintos cuadriláteros y mostrar así la necesidad de probar también que los ángulos deben ser iguales a 90°.

A continuación les planteamos oralmente a los alumnos la siguiente cuestión:

*¿Todos los cuadrados que quedan determinados de esta manera tienen igual área?*

Algunos alumnos contestan que sí porque piensan que se compensa lo que se va corriendo, o que es el mismo cuadrado rotado. Otros dicen que no y les preguntamos cómo justificarían esta afirmación.

Aquí comienzan a probar con diferentes valores y llegan a la conclusión de que las áreas son diferentes. Sin embargo, notan que algunos cuadrados tienen igual área pero que esto no indica que todos la tendrán (Figura Nº 4).

**2) ¿Todos los cuadrados (los internos del marco) tienen la misma área?**

**Al principio pensábamos que sí, todos tenían la misma área, es decir, que todos los cuadrados internos del marco eran iguales, pero luego de demostrarlo nos dimos cuenta que no.**
**Para demostrarlo lo que hicimos fue construir 2 marcos iguales (de 25cm d lado). En uno de los 2 marcos, nos movimos desde el vértice de cada lado 12,5cm (la mitad del lado) y en el segundo marco nos movimos 10cm desd el vértice de cada lado. En cada uno de los dibujos lo que hicimos fue saca cuanto mide la hipotenusa de cada uno de los triángulos (los lados del cuadrado de adentro), ya que para sacar el área tenemos que saber cuant valen sus lados. Para sacar cuanto miden los lados del cuadrado de adent hicimos Pitágoras (ya que son triángulos rectángulos): $12{,}5^2 + 12{,}5^2 = L^2$**
**$10^2 + 15^2 = L^2$**
**Como para sacar el área de un cuadrado tenemos que hacer $L^2$, llegamos la conclusión de que $L^2$ es igual al área: $12{,}5^2 + 12{,}5^2 = L^2 = A$**
**$10^2 + 15^2 = L^2 = A$**
**Haciendo estas cuentas, vimos que el área la primera, nos daba 312,5 y el área de la segunda nos daba 325. Alcanza con este ejemplo para demostr que no todos tienen la misma área.**

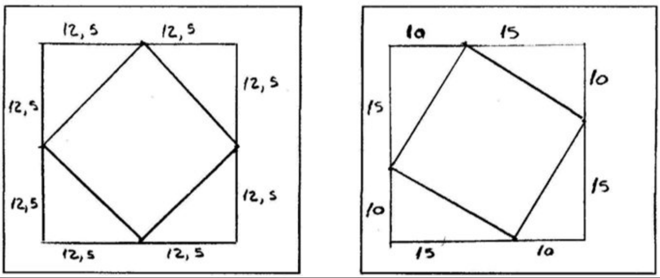



Figura Nº 04

También se analiza por qué hay dos áreas iguales y les proponemos a los alumnos que generen cuadrados de igual área. Se llega a la conclusión que para que dos cuadrados tengan igual área, la suma de lo que se corre del vértice del marco debe ser 25.

Luego de logrado este punto, planteamos la siguiente pregunta:

*¿Cuál es el cuadrado de área máxima y de área mínima que podemos construir de esta manera?*

Sin inconvenientes, los alumnos observan que el área máxima se obtiene cuando el cuadrado interior coincide con el exterior. Es decir, no me corrí nada, o me corrí 25 cm. Algunos alumnos determinan que el mínimo será el único cuadrado que no tiene otro con la misma área y esto se obtiene corriéndose 12,5 cm del vértice. Aquí notan que este es el punto medio entre cualquier par de valores para los que el área sea la misma.

A continuación les pedimos a los alumnos:

*Propongan la forma que creen tendrá el gráfico de una función que vincula el área del cuadrado a la distancia que "me corro" (teniendo en cuenta que la distancia que me corro es la distancia del vértice del cuadrado exterior al vértice del interior hacia la derecha).*

Es muy importante resaltar que para esta instancia no deben utilizar una tabla con valores, sino anticipar lo que sucederá con el gráfico a partir del análisis previo de la situación. Prevemos que aparecerán propuestas de los alumnos de este tipo:

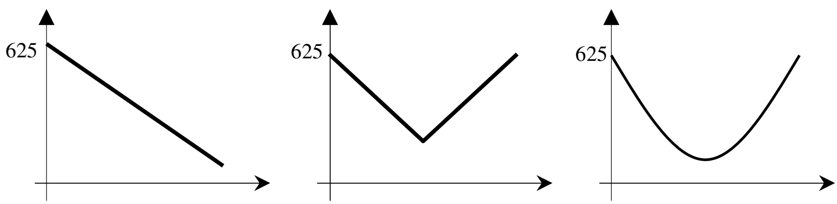



Figura Nº 05

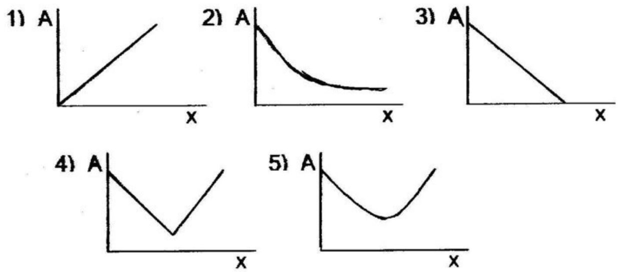
Para poder compararlas, los alumnos dibujan en el pizarrón las distintas propuestas.

Les pedimos entonces, que en pequeños grupos analicen todas las propuestas, elijan las que ellos creen que representan lo pedido y justifiquen el motivo por el que descartaron las otras.

Luego, en una puesta en común, los alumnos exponen sus conclusiones. Presentamos uno de los trabajos a continuación (Figura Nº 6).

**4) Sin poner valores graficar el área en función de x.**

Al principio tuvimos estas diferentes hipótesis:




Tuvimos que ir viendo cuales estaban mal para llegar al correcto.
Vimos que el 1 estaba mal porque no hay área 0, porque cuando empieza el área se va disminuyendo, no aumentando y porque no están graficados los simétricos. El 2 tampoco era posible porque le faltan graficar los simétricos. El 3 tampoco porque el área nunca llega a 0 y porque no están graficados los simétricos. El 4 y el 5 podrían ser, pero sin números no podíamos descartar ninguno. Entonces, lo que hicimos fue sacar la pendiente con 3 valores de x (x = 0 ; x = 10 y x = 12,5). Si las pendientes nos daban igual, estaría bien el gráfico 4, y si las pendientes daban diferentes estaría bien el gráfico 5.
Para sacar las pendientes hicimos:

| x | A |
|---|---|
| 0 | 625 |
| 10 | 325 |
| 12,5 | 312,5 |

Sacamos la pendiente entre x = 0 y x = 10 y entre x = 10 y x = 12,5

$$\text{Pendiente} = \frac{625-325}{0-10} = -30$$

$$\text{Pendiente} = \frac{325-312{,}5}{10-12{,}5} = -5$$

Figura Nº 06

Se llega a la conclusión de que el tercer gráfico de la Figura Nº 05 es el que más aproxima a la situación.

En este momento les preguntamos:

*¿Cómo podemos encontrar la fórmula que relaciona el área del cuadrado interior con lo que "me corro"?*

Aquí se presentan dos posibilidades:

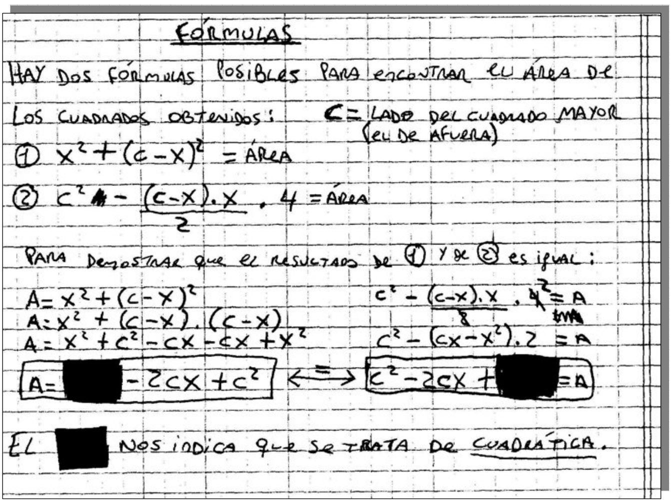
Los alumnos que calculan el lado del cuadrado interior utilizando el Teorema de Pitágoras y obtienen:

$$A = x^2 + (25 - x)^2$$

Los alumnos que restan al área del cuadrado grande el área de los cuatro triángulos y obtienen:

$$A = 25^2 - 4.\frac{x(25-x)}{2} = 625 - 2x(25-x)$$

El cuestionamiento ahora es: *Si estas expresiones calculan la misma área ¿deben ser equivalentes?* Una de las demostraciones de los alumnos se aprecia en la FiguraNº 07 (*Nota: En la mancha que aparece en negro decía:* $2x^2$).


FÓRMULAS

HAY DOS FÓRMULAS POSIBLES PARA ENCONTRAR EL ÁREA DE LOS CUADRADOS OBTENIDOS: C= LADO DEL CUADRADO MAYOR (EL DE AFUERA)

① $x^2 + (c-x)^2$ = ÁREA

② $c^2 - \frac{(c-x).x}{2} . 4$ = ÁREA

PARA DEMOSTRAR QUE EL RESULTADO DE ① Y DE ② ES IGUAL:

$A = x^2 + (c-x)^2$

$A = x^2 + (c-x).(c-x)$

$A = x^2 + c^2 - cx - cx + x^2$

$c^2 - \frac{(c-x).x}{8} . 4^2 = A$

$c^2 - (cx - x^2).2 = A$

A= [redacted] $-2cx + c^2$ ⟷ $c^2 - 2cx +$ [redacted] =A

EL [redacted] NOS INDICA QUE SE TRATA DE CUADRÁTICA.

Figura Nº 07

Al transformar ambas expresiones se llega a:

$$A = 2x^2 - 50x + 625$$

Comenzamos así a construir el concepto del modelo cuadrático.

En este momento definimos a la función cuadrática como una función cuya fórmula es de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a ≠ 0 dado que si a = 0 sería un modelo lineal. Asignamos el nombre de parábola al gráfico que la representa haciendo notar su simetría, definiendo como puntos simétricos a aquellos que tienen igual ordenada y como vértice al único punto que no tiene simétrico.

Aquí es donde intentamos despegarnos de la situación y proponer una actividad que les permita calcular el vértice de cualquier parábola y diferentes puntos simétricos. Les planteamos a los alumnos la siguiente pregunta:

*¿Cómo es posible encontrar el vértice de la función cuadrática f(x) = 2x² - 5x +3 ?*

Los alumnos, generalmente proponen que es necesario encontrar dos puntos simétricos ya que el ***x*** del vértice será el punto medio entre ambos. Para ello ponen un valor de ***y*** y tratan de buscar un valor de ***x*** correspondiente. Teniendo en cuenta que no saben resolver ecuaciones cuadráticas, obtenemos varias propuestas que no pueden avanzar. Adjuntamos algunos procedimientos a continuación.

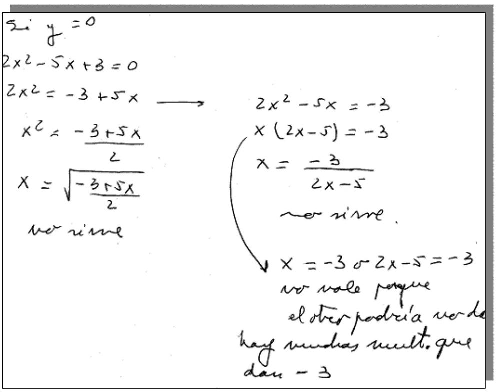



Figura Nº 08

Cuando algunos alumnos proponen tomar como ***y*** la ordenada al origen, logran resolver la ecuación y encontrar de este modo un par de valores simétricos.

$$2x^2-5x+3=3 \Rightarrow 2x^2-5x=0 \Rightarrow x(2x-5)=0 \Rightarrow x=0 \text{ ó } x=-\frac{5}{2}$$

Por lo tanto, el vértice será:

$$x_V=\frac{0+(-5/2)}{2}=-\frac{5}{4} \qquad y_V=f\left(-\frac{5}{4}\right)$$

Con indicación del docente observan que si la ecuación incluyera una sola vez a la incógnita ***x*** sería posible para ellos despejarla con los conocimientos que disponen. Para lograrlo, deberían poder escribir a la ecuación de la forma:

$$\alpha(x+p)^2+q=0$$

El planteo es entonces transformar a una ecuación del tipo:

$ax^2+bx+c=0$ ①

En una ecuación del tipo

$\alpha(x+p)^2+q=0$ ②

Es conveniente primero plantear el problema propuesto y luego su generalización.

Por ejemplo, intentemos transformar la ecuación $2x^2-5x+3=1$ sea $2x^2-5x+2=0$ en una ecuación del tipo ②.

El siguiente trabajo es interactivo pero trabajado desde el pizarrón por el docente.

$$\alpha(x+p)^2+q=0 \Rightarrow \alpha(x^2+2px+p^2)+q=0$$

$$\Rightarrow \alpha x^2+2\alpha px+\alpha p^2+q=0 \quad ③$$

Para que la ecuación $2x^2-5x+2=0$ sea igual a la ③ debe ser:

$\alpha = 2$ $\qquad\qquad 2\alpha p = -5 \Rightarrow p = -5/4$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \alpha p^2 + q = 2 \Rightarrow q = -9/8$

Con lo cual $2x^2 - 5x + 2 = 0$ se transforma en $2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} = 0$ y entonces es posible despejar para encontrar así un par de simétricos con $y = 1$ y de esta manera calcular el vértice. Este procedimiento les permite hallar cualquier par de simétricos que se propongan. Algunos alumnos notan que una vez encontrado un par de simétricos y el vértice, otros pares de simétricos se obtienen utilizando la información de que el vértice se encuentra en el medio. De esta forma pueden encontrar más simétricos sin necesidad de resolver ninguna ecuación. Adjuntamos a continuación algunos trabajos de los alumnos referentes a esta cuestión.

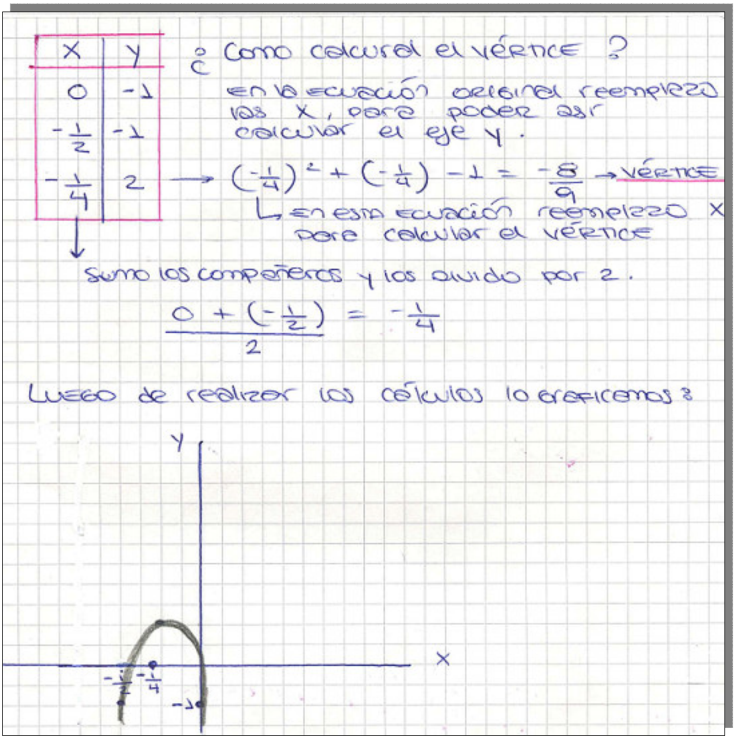
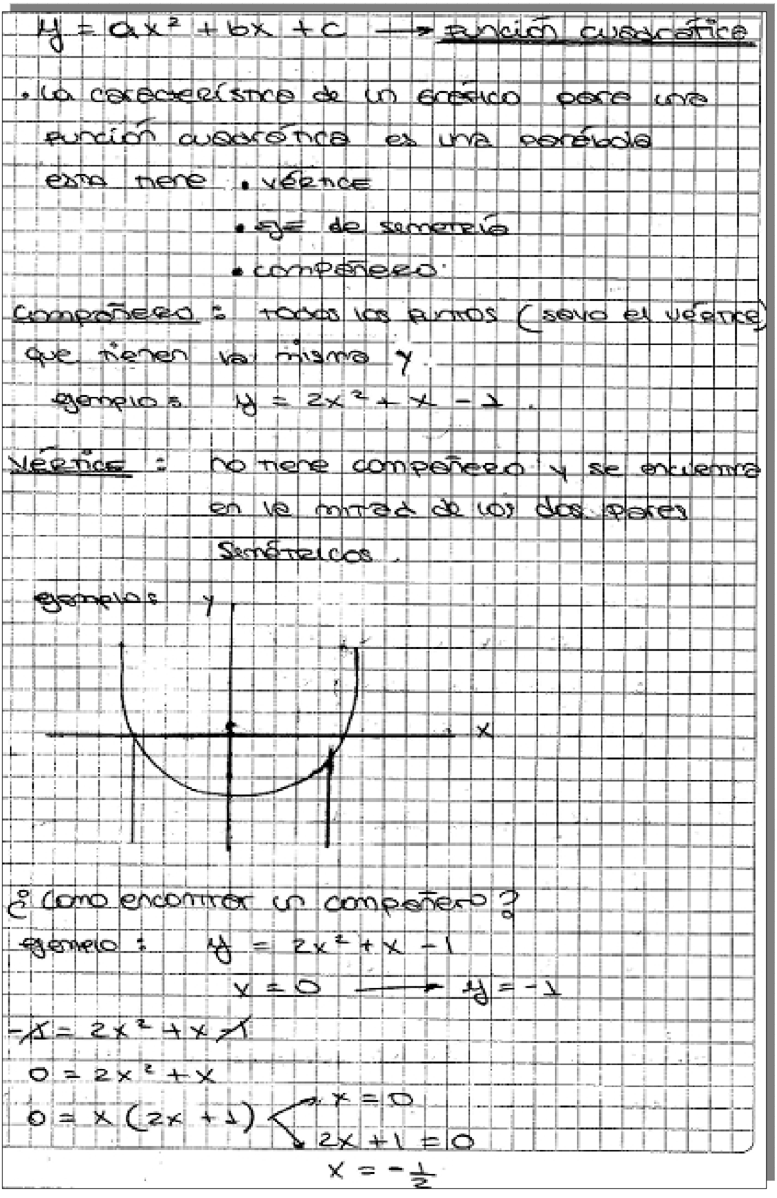



Figura Nº 09



$y = ax^2 + bx + c \longrightarrow$ función cuadrática

• La característica de un gráfico para una función cuadrática es una parábola

esta tiene • vértice

• eje de simetría

• compañero

Compañero: todos los puntos (salvo el vértice) que tienen la misma y.

ejemplo: $y = 2x^2 + x - 1$.

Vértice: no tiene compañero y se encuentra en la mitad de los dos pares simétricos.

ejemplo:



¿Como encontrar un compañero?

ejemplo: $y = 2x^2 + x - 1$

$x = 0 \longrightarrow y = -1$

$-\cancel{1} = 2x^2 + x \cancel{-1}$

$0 = 2x^2 + x$

$0 = x(2x + 1)$ → $x = 0$ ; $2x + 1 = 0$

$x = -\frac{1}{2}$

Figura Nº 10

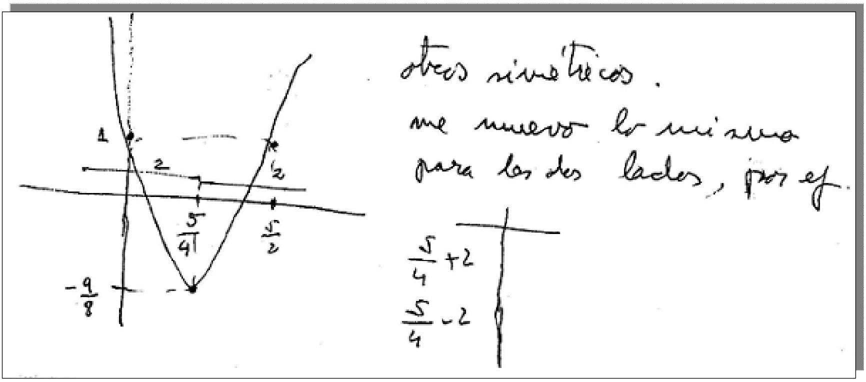



Figura Nº 11

Luego de este ejemplo, y procediendo en forma análoga, pero tratando de escribir una ecuación del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ de la forma $\alpha(x + p)^2 + q = 0$, se llega a la fórmula de la resolvente y también la fórmula para hallar la coordenada $\boldsymbol{x}$ del vértice.

**Conclusiones**

Esta secuencia ha movilizado cuestiones centrales de la función cuadrática: simetría, existencia de máximo o mínimo, variación no lineal, resolución de ecuaciones. A partir de este punto iniciamos el estudio completo de las funciones cuadráticas trabajando con problemas que nos permitan reutilizar los conceptos abordados hasta este momento.

Podemos decir, a partir de nuestra experiencia, que este tipo de secuencia resulta muy significativa para los alumnos ya que en trabajos posteriores en los cuales tienen que utilizar como recurso el modelo cuadrático toman a este problema como referente.

**Referencias bibliográficas**

Altman, S.; Comparatore, C. & Kurzrok, L. (2002), El modelo cuadrático en el aula. En: *Novedades Educativas* Nº 134**,** Febrero. Buenos Aires

Artigue, M. (2002). *Ingénierie didactique: que rôle dans la recherche didactique aujourd´hui?* Les dossiers des Sciences de l´Education. Didactique des disciplines scientifiques et technologiques: concepts et méthodes. Revue Internationale des Sciences de l´Education. Presses Universitaires du Mirail. N ° 8.

Bosh, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilidad de la actividad matemática a los ostensivos. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol.19, Nº1, pp. 77-124

Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro, en Parra, C. y Saiz, I. (Comp.) Didáctica de matemáticas. Buenos Aires: Paidós.

Brousseau, G. (1993). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática, en: *Trabajos de Matemática*, FAMAF, Universidad de Córdoba, Córdoba, Caps. I-IV.

Charnay, R. (1988). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En Parra C. y Saiz, I. (Comp). (1993). *Didáctica de las matemáticas: Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidós.

Chevallard, Y. (1997). La transposición didáctica. Buenos Aires: Aique.

Chevallard, Y. *et al*. (1997). Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje, ICE. Barcelona: Horsori.

Dirección de currícula (2000). Matemática. Documento Nº 2. La formación de los alumnos como estudiantes. Estudiar matemática. Buenos Aires.

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. (1999). Diseño curricular para la EGB - Marco General.

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. (2002). Actualización de programas de nivel medio, Primer año y Segundo año.

Ministerio de Educación. (2000). Propuestas para el aula. Matemática.

Sadovsky, P. (2005). La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. En: *Reflexiones teóricas par la educación matemática*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.